MATRIKS DIAGONAL DALAM KAJIAN PENYELESAIAN SISTEM PERSAMAAN DIFERENSIAL

Try Azisah Nurman
Dosen Jurusan Matematika Fak. Sains dan Teknologi
UIN Alauddin Makassar
Email: *chicha_chirwan@yahoo.com*

Abstract: *This paper discusses the methods of algebraic functions on the settlement limit of indeterminate forms. Limit is a mathematical method used to describe the effect of variable functions move closer to a point on a particular function. The goal is to determine the specific characteristics of the methods of algebraic functions on the settlement limit of indeterminate forms. The methods used is a special method that consists of factoring methods, methods of multiplication herd, and the division with the highest rank method, and the method of L' Hopital. By using the methods mentioned above, then we obtain the specific characteristics of the methods of algebraic functions settlement limit on the indeterminate form are 1. Factoring methods: (a) The numerator is the result of squaring the binomial equation of the denominator. Where, (i) If the binomial equation using the difference operation, then its points is positive. (ii) If the binomial equations using addition operation, then its points is negative. (b) the constant factor of each of the numerator and denominator equally. One of which is a three tribal equation in the form* $ax^2 + bx + c$ *, the value of b it is the sum of the value of the constant multiplication. (c) If the numerator and denominator are both binomial equations with difference operation, where the variables and constants in the numerator is the square of the variable and constant denominator. Or conversely, variables and constants in the denominator is the square of the variable and constant numerator. (d) If the equation is a difference of two fractions where the denominator is a binomial variables and constants in the denominator is the result of one of the squaring of the variables and constants in the denominator of the other. (e) If the equation in the form of fragments which all contain the same variables. (f) If the equation is in the form of two parts, where the coefficients and constants in the numerator or the same multiplication factor, so that when the coefficients and constants removed it will form one of the factors that equation equal to that of the denominator. 2. A herd Multiplication method: (a) If the equation is the difference of two roots. (b) If the equation in the form of the difference or fractions containing amount root form. Both the numerator and the denominator. 3. Distribution by Top Rank methods: (a) If the equation in the form ∞/∞. (b) If a polynomial equation of degree 3, 4, 5,... etc. Which is hard to be factored. 4. L' Hopital method: if the limit point is substituted then produces the indeterminate form 0/0, ∞/∞, ∞-∞ , except if the derivative of the function at the root of the denominator in the form similar to the form factor function in the numerator. Vice versa, the derivative of the function at* *the root of the numerator shaped form factor similar to the function in the denominator.*

Key words: *Limit, indeterminate forms, L' Hopital method.*

I. PENDAHULUAN

Perkembangan peradaban manusia tidak terlepas dari ilmu-ilmu dasar (*Basic Sciences*) sebagai logika berpikir. Matematika telah banyak mengajarkan manusia mengenal dan menjelaskan fenomena-fenomena yang terjadi di sekelilingnya. Dengan matematika manusia dapat mempelajari dan sekaligus mendapatkan pemodelan atas fenomena yang terjadi atau diamatinya. (Harahap, 2005, h.3) Dalam Al-Qur'an memuat banyak ayat tentang isyarat-isyarat matematika, antara lain terdapat pada Q.S. Al-A'raf/7:142.

۞ وَوَٰعَدۡنَا مُوسَىٰ ثَلَٰثِينَ لَيۡلَةٗ وَأَتۡمَمۡنَٰهَا بِعَشۡرٖ فَتَمَّ مِيقَٰتُ رَبِّهِۦٓ أَرۡبَعِينَ لَيۡلَةٗۚ وَقَالَ
مُوسَىٰ لِأَخِيهِ هَٰرُونَ ٱخۡلُفۡنِي فِي قَوۡمِي وَأَصۡلِحۡ وَلَا تَتَّبِعۡ سَبِيلَ ٱلۡمُفۡسِدِينَ ١٤٢

Terjemahnya:

> *Dan telah kami janjikan kepada Musa (memberikan Taurat) sesudah berlalu waktu tiga puluh malam, dan kami sempurnakan jumlah malam itu dengan sepuluh (malam lagi), Maka sempurnalah waktu yang telah ditentukan Tuhannya empat puluh malam. Dan berkata Musa kepada saudaranya yaitu Harun: "Gantikanlah aku dalam (memimpin) kaumku, dan perbaikilah, dan janganlah kamu mengikuti jalan orang-orang yang membuat kerusakan"* (Depag RI, 2005).

Melalui ayat di atas Allah SWT. memberitahukan Nabi Musa AS. tentang lamanya waktu diturunkannya kitab Taurat yaitu selama 40 hari lewat operasi penjumlahan matematika yaitu 30 + 10 = 40.

Ayat di atas memberikan gambaran bahwa tidak semua orang tahu tentang perhitungan, dimana perhitungan sering kali diperdebatkan. Oleh karena itu, matematika sebagai bahasa simbol yang bersifat universal memegang peranan penting dalam perkembangan suatu teknologi. Matematika sangat erat hubungannya dengan kehidupan nyata. Banyak penyelesaian masalah dalam kehidupan nyata membutuhkan metode-metode matematika. Di dalam kehidupan nyata kadang-kadang terdapat masalah yang sukar diselesaikan dalam sistemnya. Untuk menyelesaikan masalah tersebut perlu disusun suatu pemodelan matematika yang mirip dengan keadaan sistemnya. Berbicara tentang bagaimana merumuskan suatu model matematika dari masalah yang terjadi di dunia nyata, baik melalui penalaran intuitif tentang fenomena tersebut, atau dari suatu hukum fisika yang berdasarkan pada bukti yang didapat dari percobaan-percobaan. Persoalan yang muncul dari dalam bidang fisika matematika sering dapat diturunkan ke dalam suatu persamaan diferensial. Persamaan diferensial merupakan salah satu cabang matematika yang termasuk kelompok analisis.

Secara umum, persamaan diferensial adalah suatu persamaan yang mengandung sebuah fungsi yang tak diketahui dari satu atau lebih turunan fungsi. Persamaan diferensial pertama kali diperkenalkan oleh Leibniz pada Tahun 1676. Persamaan diferensial sering sekali muncul dalam model matematika yang mencoba menggambarkan keadaan kehidupan nyata. Persamaan diferensial dibedakan menjadi dua yaitu persamaan diferensial biasa (*ordinary differential equation*) dan persamaan diferensial parsial (*partial differential equation*). Salah satu klasifikasi yang jelas adalah dengan melihat apakah fungsi yang tak diketahui tergantung pada satu atau lebih turunan fungsi. Jika hanya satu disebut persamaan diferensial biasa dan jika fungsi yang tak diketahui lebih dari satu disebut persamaan diferensial parsial (Stewart, 2003). Dimana banyaknya turunan fungsi disimbolkan dengan n.

Penyelesaian sistem Persamaan Diferensial (PD) sederhana dapat diatasi melalui pendekatan elementer terhadap sistem persamaan diferensial. Persamaan diferensial difokuskan pada penentuan penyelesaian dari persamaan diferensial. Ada banyak persamaan diferensial yang rumit diperoleh bentuk penyelesaiannya. Namun, untuk menyelesaikan suatu sistem persamaan diferensial yang lebih rumit, matriks sangat dianjurkan digunakan untuk sistem PD dengan $n \geq 3$. Matriks dan khususnya pendiagonalan dalam aljabar linear merupakan salah satu metode yang secara umum jauh lebih efisien untuk memecahkan suatu sistem persamaan diferensial sederhana maupun rumit.(Rahman, dkk., 2007)

II. KAJIAN TEORITIS

A. *Matriks*

Matriks adalah suatu kumpulan bilangan yang disusun dalam baris dan kolom, sehingga berbentuk persegi panjang atau bujur sangkar, dan ditulis diantara dua tanda kurung dan dicetak tebal yaitu $\boldsymbol{A} = (\cdots)$ atau $\boldsymbol{A} = [\cdots]$. H. (Cambage,1980) Bentuk umum suatu matriks adalah:

$$A_{m\,x\,n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{mn} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

1. Jenis-jenis matriks

a. *Matriks Bujur Sangkar*, jika baris dan kolom sama.
b. *Matriks Segitiga*, ada dua jenis matriks segitiga yaitu matriks segitiga atas (*upper triangular*) dan matriks segitiga bawah (*lower triangular*). Jika suatu matriks bujur sangkar yang semua elemennya terletak di bawah diagonal sama dengan nol, maka disebut matriks segitiga atas. Sedangkan jika dalam sebuah matriks bujur sangkar, semua elemen terletak diatas diagonal sama dengan nol, maka disebut matriks segitiga bawah.
c. *Matriks Diagonal*, jika semua elemen di atas dan di bawah diagonal suatu matriks bujur sangkar sama dengan nol maka disebut matriks diagonal.
d. *Matriks Identitas*, jika diagonal suatu matriks bujur sangkar sama dengan satu, dan semua elemen lainnya sama dengan nol, maka disebut matriks identitas.
e. *Matriks Skalar*, jika suatu matriks $\boldsymbol{A} = k\boldsymbol{I}$.
f. *Matriks Transpos*, diperoleh dengan menukar elemen-elemen baris menjadi elemen-elemen kolom atau sebaliknya.

2. Operasi Matriks

a. Penjumlahan dan Pengurangan Matriks, jika kedua matriks itu memiliki ordo yang sama. Jumlah $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}$ ialah suatu matriks $\boldsymbol{C}$ yang diperoleh dengan menjumlahkan elemen-elemen yang bersesuaian letaknya. Selisih dua matriks adalah suatu matriks baru $\boldsymbol{C} = [c_{ij}]$, yang diperoleh dengan mengurangkan elemen yang bersesuaian letaknya.
b. Perkalian Matriks
   1) Perkalian Matriks dengan Skalar, jika k suatu skalar, maka matriks $k\boldsymbol{A} = [ka_{ij}]$ diperoleh dengan mengalikan semua elemen matriks $\boldsymbol{A}$ dengan k.
   2) Perkalian Matriks dengan Matriks, jika $\boldsymbol{A}$ adalah matriks $m \times r$ dan $\boldsymbol{B}$ adalah matriks $r \times n$, maka hasil kali $\boldsymbol{AB}$ adalah matriks $m \times n$ yang entri-entrinya ditentukan sebagai berikut. Untuk mencari entri dalam baris i dan kolom j dari $\boldsymbol{AB}$ pilihlah baris i dari matriks $\boldsymbol{A}$ dan kolom j dari matriks $\boldsymbol{B}$. Kalikan entri-entri yang bersesuaian dari baris dan kolom tersebut bersama-sama dan kemudian tambahkanlah hasil kali yang dihasilkan.(Anton, 1987, 25)

B. *Matriks Elementer*

Definisi 1: Suatu matriks $n \times n$ dinamakan matriks elementer jika matriks tersebut dapat diperoleh dari matriks satuan (identitas) $n \times n$ yakni $\boldsymbol{I}_n$ dengan melakukan sebuah operasi baris elementer tunggal. .(Anton, 1987, 25)

Contoh

Di bawah ini didaftarkan tiga matriks elementer dan penggunaan operasi baris yang akan mengembalikan matriks elementer yang diberikan pada matriks satuan.

(*i*) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$ Matriks di samping diperoleh dari matriks satuan dengan mengalikan baris kedua dari I_2 dengan -3.

(*ii*) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ Matriks di samping diperoleh dari matriks satuan dengan mempertukarkan baris kedua dan baris keempat dari I_4.

(*iii*) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ Matriks di samping diperoleh dari matriks satuan dengan menambahkan tiga kali baris ketiga dari I_3 pada baris pertama.

C. *Determinan dan Invers matriks*

1. Determinan

Determinan adalah nilai real yang dihitung berdasarkan nilai elemen-elemennya, ditulis dengan simbol det ($\boldsymbol{A}$) atau $|\boldsymbol{A}|$. Jika nilai determinan itu nol, matriks bujur sangkar tersebut singular, artinya tidak memiliki invers. Jika nilai determinan suatu matriks tidak nol, berarti matriks $\boldsymbol{A}$ tersebut nonsingular, yaitu matriks tersebut mempunyai invers.(Sutojo dkk, 2010, 125)

a. Determinan matriks ordo 2×2 dapat ditentukan dengan cara nilai elemen diagonal utamanya dikurangkan dari kedua elemennya.(Mckim dkk. 1984, 305)
b. Determinan matriks ordo 3×3 ditentukan dengan aturan *Sarrus*:
c. Determinan matriks ordo $n \times n$ dihitung dengan menggunakan Ekspansi Laplace.

2. Sifat-sifat Determinan:

a. Nilai suatu determinan transpose $\boldsymbol{A}$ sama dengan nilai determinan $\boldsymbol{A}$**.**
b. Jika salah satu baris/kolom semua unsurnya nol maka nilai determinan =0.
c. Jika dua baris/kolom ditukar tempatnya maka nilai determinan tandanya berubah.

d. Jika ada dua baris/kolom unsur-unsurnya bernilai sama maka nilai determinan tersebut sama dengan nol.
e. Jika salah satu baris/kolom semua unsurnya berfaktor $k \neq 0$ maka k bisa dikeluarkan dari determinan sebagai faktor.
f. Jika ada dua baris/kolom unsur-unsurnya sebanding maka nilai determinan tersebut sama dengan nol.
g. Jika salah satu baris/kolom ditambah dengan k kali baris/kolom yang lain maka nilai determinan tidak berubah.
h. Jika ada salah satu baris/kolom semua unsurnya terdiri dari p suku, maka determinan bisa didekomposisi atas p suku pula dengan setiap suku dari masing-masing unsur baris/kolom determinan semula menempati unsur baris/kolom dari masing-masing suku dari determinan hasil dekomposisi secara bersesuaian.(Latra, 2004, 6)

3. Invers Matriks

Bila suatu matriks bujur sangkar $\boldsymbol{A}$ dikalikan dengan matriks bujur sangkar $\boldsymbol{B}$ menghasilkan matriks identitas, yaitu $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA} = \boldsymbol{I}$ maka dikatakan $\boldsymbol{A}$ merupakan invers $\boldsymbol{B}$ atau $\boldsymbol{B}$ merupakan invers $\boldsymbol{A}$. Misal $\boldsymbol{B}$ merupakan invers dari $\boldsymbol{A}$. Maka notasi yang digunakan $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}^{-1}$. Suatu matriks yang mempunyai invers dikatakan matriks *invertibel* (dapat dibalik).(Mursita, 2011) Invers dari sebuah matriks adalah tunggal atau hanya ada satu dan berlaku sifat: $(\boldsymbol{A}^{-1})^{-1} = \boldsymbol{A}$. Matriks yang mempunyai invers adalah matriks yang nonsingular.(Sutojo dkk, 2010, 153) Dengan mudah untuk menetapkan bahwa jika $\boldsymbol{A}^{-1}$ ada, maka $\boldsymbol{AA}^{-1} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}$.(Rao dan Helge, 1999, 494)

Untuk menentukan nilai invers suatu matriks, berdasarkan rumus berikut: Cambage, 1980, 32)

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{adj(\boldsymbol{A})}{|\boldsymbol{A}|} = \begin{bmatrix} \frac{C_{11}}{|\boldsymbol{A}|} & \frac{C_{21}}{|\boldsymbol{A}|} & \cdots & \frac{C_{n1}}{|\boldsymbol{A}|} \\ \frac{C_{12}}{|\boldsymbol{A}|} & \frac{C_{22}}{|\boldsymbol{A}|} & \cdots & \frac{C_{n2}}{|\boldsymbol{A}|} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{C_{1n}}{|\boldsymbol{A}|} & \frac{C_{2n}}{|\boldsymbol{A}|} & \cdots & \frac{C_{3n}}{|\boldsymbol{A}|} \end{bmatrix}$$

dengan catatan $\det(\boldsymbol{A}) \neq 0$.

4. Sifat-sifat invers:

a. $(\boldsymbol{AB})^{-1} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$
b. $(\boldsymbol{A}^{-1})^{-1} = \boldsymbol{A}$

c. $(\boldsymbol{A}^{-1}) = (\boldsymbol{A})^{-1}$
d. $\boldsymbol{A}^{-1}$ simetris jika dan hanya jika $\boldsymbol{A}$ simetris.

D. *Kebebasan Linear*

Definisi 2 Jika $S = \{\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \dots, \boldsymbol{v_r}\}$ adalah himpunan vektor, maka persamaan vektor

$k_1\boldsymbol{v}_1 + k_2\boldsymbol{v}_2 + k_3\boldsymbol{v}_3 + \cdots + k_r\boldsymbol{v}_r.$

Mempunyai paling sedikit satu pemecahan, yakni

$k_1 = 0, k_2 = 0, \dots, k_r = 0.$

Jika ini adalah satu-satunya pemecahan, maka S dinamakan himpunan bebas linear (*linearly independent*). Jika ada pemecahan lain, maka S dinamakan himpunan tak bebas linear (*linearly dependent*).(Anton, 1987, 151)

E. *Nilai Eigen dan Vektor Eigen*

Diketahui $\boldsymbol{A}$ matriks berukuran $n \times n$, $\boldsymbol{x}$ vektor tak–nol berukuran $n \times 1$, $\boldsymbol{x} \in R^n$. Karena $\boldsymbol{A}$ berukuran $n \times n$, maka $\boldsymbol{Ax}$ akan berupa vektor yang berukuran $n \times 1$ juga. Bila terdapat skalar λ, $\lambda \in R$ sedemikian hingga $\boldsymbol{Ax} = \lambda \boldsymbol{Ix}$ (*A***x** menghasilkan vektor yang besarnya λ kali **x**). Semua nilai λ yang memenuhi persamaan tersebut sehingga ada nilai $\boldsymbol{x}$ yang nyata (bukan vektor 0 saja) disebut *nilai eigen* (karakteristik).(Firdausy2011) $\boldsymbol{x}$ dikatakan vektor eigen yang bersesuaian dengan λ.(Jhonson, 2002, 60)

Untuk menentukan nilai *eigen* $\boldsymbol{A}$ yang berukuran $n \times n$ maka dituliskan kembali $\boldsymbol{Ax} = \lambda \boldsymbol{Ix}$ sebagai $\boldsymbol{Ax} = \lambda \boldsymbol{Ix}$ atau ekuivalen dengan

$$(\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = 0 \qquad \text{... (2.1)}$$

Supaya λ menjadi nilai *eigen* maka harus ada penyelesaian tak nol dari persamaan (2.1). Persamaan (2.1) akan mempunyai penyelesaian tak nol jika dan hanya jika:

$$\det(\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) = 0$$

ini dinamakan persamaan karakteristik $\boldsymbol{A}$. Skalar yang memenuhi persamaan ini adalah nilai *eigen* dari **A**. Bila diperluas, maka determinan $(\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})$ adalah polinom λ yang dinamakan polinom karakteristik dari $\boldsymbol{A}$.

F. *Diagonalisasi Matriks*

Definisi 3: Matriks kuadrat $\boldsymbol{A}$ dinamakan dapat diagonalisasi (*diagonalizable*) jika terdapat matriks $\boldsymbol{P}$ yang dapat dibalik sehingga $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$ diagonal; matriks $\boldsymbol{P}$ dikatakan mendiagonalisasi $\boldsymbol{A}$.

G. *Persamaan Diferensial*

Definisi 4: Persamaan diferensial adalah suatu persamaan yang memuat satu atau lebih turunan fungsi yang tidak diketahui. Jika persamaan diferensial memiliki satu peubah tak bebas maka disebut Persamaan Diferensial Biasa (PDB). Sedangkan jika peubah bebasnya lebih dari satu dinamakan Persamaan Diferensial Parsial (PDP).(Yulianty, 2011)

Dikenalkan suatu istilah dalam Persamaan Diferensial (PD) yaitu orde. Orde dari PD adalah besar turunan tertinggi yang terjadi pada PD.(Mursita, 2006, 191) Khususnya, suatu persamaan yang berbentuk

$$F(x, y, y^{(1)}, y^{(2)}, \cdots y^{(n)}) = 0$$

Dimana y^n menyatakan turunan y terhadap x yang ke n, disebut persamaan diferensial berorde n. Adapun bentuk umum persamaan diferensial biasa linear (PDBL) orde-n yaitu:

$$a_n(x)\, y^n + a_{n-1}(x)\, y^{n-1} + \ldots + a_0(x)\, y = f(x)$$

Dengan $a_n(x) \neq 0$ dan $a_n(x), a_{n-1}(x) \ldots, a_0(x)$ adalah koefisien persamaan diferensial. Bila $f(x) = 0$ disebut PDBL homogen, sebaliknya jika tidak disebut PDBL tak homogen. Bila tidak dapat dinyatakan seperti bentuk di atas dikatakan PD tidak linear.

1. Jenis-jenis Persamaan Diferensial

Jenis-jenis persamaan diferensial khususnya persamaan diferensial orde satu dan orde dua yaitu:

a. Persamaan Diferensial Linear Orde Satu

$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$ atau $y' + P(x)y = Q(x)$, $Q(x)$ fungsi dari x.

Suatu persamaan jenis ini selalu dapat diselesaikan. Pertama-tama dikalikan kedua ruas dengan faktor integral

$$e^{\int P(x)dx}$$

yang menghasilkan

$$e^{\int P(x)dx}\frac{dy}{dx} + e^{\int P(x)dx}P(x)y = Q(x)e^{\int P(x)dx}$$

Kemudian ruas kiri sebagai turunan dari $ye^{\int P(x)dx}$, sehingga persamaan mengambil bentuk

$$\frac{d}{dx}\left(ye^{\int P(x)dx}\right) = Q(x)e^{\int P(x)dx}$$

Pengintegralan kedua ruas menghasilkan

$$ye^{\int P(x)dx} = \int (Q(x)e^{\int P(x)dx})dx$$

Sehingga $y = e^{-\int P(x)dx}\int (Q(x)e^{\int P(x)dx})dx$

Karena bentuk di atas merupakan integral tak tentu maka solusi masih mengandung C dan disebut solusi umum PD. Solusi khusus PD dapat ditentukan dengan mensubtitusikan nilai awal $y(a) = b$ yang diberikan ke dalam solusi umum, untuk menghitung besar nilai C.(Mursita, 2006, 193)

b. Variabel yang dapat dipisahkan

Suatu PD orde satu, peubah x dan y dapat dipisahkan. Sehingga peubah x dapat dikelompokkan dengan dx dan peubah y dapat dikelompokkan dengan dy pada ruas yang berbeda. Sehingga solusi umum PD terpisah, dengan memisahkan kedua peubah dan kemudian mengintegralkan kedua ruas.

Bentuk umum: $y' = \frac{dy}{dx} = \frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$ atau $P(x,y)dx = Q(x,y)dy$

Dapat dijadikan bentuk $M(x)dx = N(y)dy$ dan $\int M(x)dx = \int N(y)dy$

$M(x) =$ suatu fungsi hanya dari x,

$M(y) =$ suatu fungsi hanya dari y.(Riogilang, 1983, 3)

c. Persamaan Diferensial Homogen

Bentuk umum: $P(x,y)dx = Q(x,y)dy$. Dinamakan Persamaan diferensial homogen jika $P(x,y)$ dan $Q(x,y)$ homogen dan berderajat sama. Persamaan ini dapat diselesaikan dengan subtitusi $v = \frac{y}{x}$ atau $y = vx$, sehingga didapatkan $dy = vdx + xdv$.(Riogilang, 1983, 7)

$$P(x,y) \longrightarrow P(x,vx) = x^m\big(R(v)\big)$$

$$Q(x,y) \longrightarrow Q(x,vx) = x^m(\mathrm{S(v)})$$

menjadi:

$$\underline{x^m R(v)dx + x^m S(v)(vdx + xdv) = 0} : x^m$$

atau

$$\underline{[R(v) + vS(v)]dx + S(v)xdv = 0} : R(v) + vS(v)x$$

$$\frac{dx}{x} + \frac{S(v)}{R(v) + vS(v)}dv = 0$$

$$\int \frac{dx}{x} + \int \frac{S(v)}{R(v) + vS(v)}dv = C$$

d. Persamaan Diferensial Linear Orde Dua Homogen

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = k(x)$$

Pada bagian ini dibuat dua anggapan penyederhanaan:

1) $a_1(x)$ dan $a_2(x)$ adalah konstanta, dan
2) $k(x)$ secara identik adalah nol (kasus homogen).

Jadi tugas awal yang harus diselesaikan adalah

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$$

Untuk menyelesaikan suatu persamaan orde pertama diperlukan suatu pengintegralan dan menuju kesuatu penyelesaian umum dengan suatu konstanta sebarang. Dari persamaan orde pertama, diharapkan penyelesaian suatu persamaan orde kedua mencakup dua pengintegralan dan karena ini penyelesaian umum akan mempunyai dua konstanta sebarang. Hal ini benar, ternyata suatu persamaan diferensial linear homogen orde kedua selalu mempunyai dua penyelesaian fundamental $u_1(x)$ dan $u_2(x)$, yang saling bebas satu sama lain (yakni, fungsi yang satu bukan kelipatan fungsi yang lainnya). Dari kelinearan operator $D^2 + a_1 D + a_2$,

$$C_1 u_1(x) + C_2 u_2(x)$$

adalah suatu penyelesaian juga.

Persamaan bantu: Karena $D_x(e^{rx}) = re^{rx}$, kelihatannya sangat mungkin bahwa e^{rx} akan merupakan suatu penyelesaian terhadap persamaan diferensial untuk suatu pilihan r yang sesuai. Untuk menguji kemungkinan ini, pertama dituliskan persamaan itu dalam bentuk operator

$$(D^2 + a_1 D + a_2)y = 0 \qquad \text{... (2.5)}$$

Sekarang

$$\begin{aligned}(D^2 + a_1 D + a_2)e^{rx} &= D^2(e^{rx}) + a_1(e^{rx}) + a_2(e^{rx}) \\ &= r^2 e^{rx} + a_1 r e^{rx} + a_2 e^{rx} \\ &= e^{rx}(r^2 + a_1 r + a_2)\end{aligned}$$

Ungkapan yang belakangan adalah nol, asal saja

$$r^2 = a_1 r + a_2 = 0 \qquad \text{... (2.6)}$$

Terdapat tiga kasus yang ditinjau, berpadanan terhadap persamaan bantu yang mempunyai dua akar real berlainan, akar tunggal berulang, atau akar-akar kompleks saling konjugat.(Purcell dan Dale, 1987, 441)

1) Akar-akar Real Berlainan, maka penyelesaian umum $y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$ adalah $y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$
2) Akar Berulang, maka penyelesaian umum terhadap $y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$ adalah $y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 x e^{r_2 x}$
3) Akar-akar Kompleks Saling Konjugat $\alpha + \beta i$, maka penyelesaian umum terhadap $y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$ adalah $y = C_1 e^{\alpha x} \cos \beta x + C_2 e^{\alpha x} \sin \beta x$

H. *Sistem Persamaan Diferensial Linear (SPDL)*

Permasalahan dari suatu model matematis yang berbentuk persamaan diferensial yang lebih dari satu fungsi tak diketahui membutuhkan suatu bentuk khusus dari persamaan diferensial yang disebut sistem PD.Bentuk umum dari sistem PD orde satu didefinisikan sebagai berikut:

$$\frac{dx_1}{dt} = a_{11}(t)x_1(t) + a_{12}(t)x_2(t) + \cdots + a_{1n}(t)x_n(t) + b_1(t)\ \vdots$$

$$\frac{dx_n}{dt} = a_{n1}(t)x_1(t) + a_{n2}(t)x_2(t) + \cdots + a_{nn}(t)x_n(t) + b_n(t) \qquad (2.7)$$

Dimana $a_{ij}(t)$ dan $b_i(t)$ adalah fungsi yang spesifik dalam interval I. Persamaan (2.7) disebut SPDL orde satu. Jika $b_1 = b_2 = \cdots = b_n = 0$, maka sistem disebut homogen dan selain itu disebut nonhomogen.(Rahman, dkk, 2007, 112)

Definisi 5: Penyelesaian sistem PD (2.7) dalam interval *I* adalah *n* buah fungsi $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)$ yang masing-masing dapat diturunkan pada interval *I*, dan jika disubtitusikan ke dalam persamaan (2.7) membuat identitas dalam *t* untuk semua *I*.(Abdul Rahman, 2007, 123)

Pengembangan teori dari sistem penyelesaian umum dari sistem PD linear orde satu adalah merumuskan masalah dari pemecahan sistem PD linear dengan pendekatan ruang vektor, dengan mengubah persamaan (2.7) menjadi bentuk matriks sebagai berikut:

$$\boldsymbol{x}'(t) = \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{b}(t)$$

$$\boldsymbol{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \boldsymbol{x}'(t) = \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{bmatrix}, \boldsymbol{A}(t) = \begin{bmatrix} a_{11}(t) a_{12}(t) \ldots a_{1n}(t) \\ \vdots \\ a_{n1}(t) a_{n2}(t) \ldots a_{nn}(t) \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{b}(t) = \begin{bmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{bmatrix}$$

Secara umum masalah nilai awal (MNA) dari SPDL rumusnya dapat diberikan sebagai permasalahan matriks : $\boldsymbol{x}'(t) = \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{b}(t)$, dengan kondisi awal $\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x_0}$, $\boldsymbol{x}_0 = [a_1, a_2, \ldots a_n]^T$.

a. Mengubah PD Tingkat n ke Bentuk Sistem PD Orde Satu
b. Penyelesaian Umum dari Sistem Persamaan Linear Orde Satu.
c. Penyelesaian Sistem PD Homogen

III. PEMBAHASAN

1. Penerapan Matriks Diagonal

Pada bagian ini, akan ditelaah bagaimana memecahkan sistem persamaan diferensial yang berbentuk:

$$\begin{array}{l} y'_1 = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \cdots + a_{1n}y_n \\ y'_2 = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \cdots + a_{2n}y_n \\ \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \quad \ddots \quad \vdots \\ y'_n = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \cdots + a_{nn}y_n \end{array}$$

Dimana $y_1 = f_1(x), y_2 = f_2(x), \ldots, y_n = f_n(x)$ adalah fungsi-fungsi yang akan ditentukan dan a_{ij} adalah konstanta-konstanta. Sistem persamaan diferensial tersebut dapat ditulis dalam bentuk notasi matriks seperti berikut:

$$\begin{bmatrix} y'_1 \\ y'_2 \\ \vdots \\ y'_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

atau secara lebih singkat $\boldsymbol{Y}' = \boldsymbol{AY}$ dengan:

$$\boldsymbol{Y}' = \begin{bmatrix} y'_1 \\ y'_2 \\ \vdots \\ y'_n \end{bmatrix}, \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \boldsymbol{Y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

Untuk menangani sistem $\boldsymbol{Y}' = \boldsymbol{AY}$ yang matriks $\boldsymbol{A}$ tidak diagonal, dibuat substitusi untuk $\boldsymbol{Y}$ yang akan menghasilkan sebuah sistem baru dengan sebuah matriks koefisien diagonal.

Tipe substitusinya adalah:

$$\begin{array}{l} y_1 = p_{11}u_1 + p_{12}u_2 + \cdots + p_{1n}u_n \\ y_2 = p_{21}u_1 + p_{22}u_2 + \cdots + p_{2n}u_n \\ \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \ddots \quad\quad \vdots \\ y_n = p_{n1}u_1 + p_{n2}u_2 + \cdots + p_{nn}u_n \end{array}$$

atau pada notasi matriks,

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$$

atau lebih singkat ditulis

$$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{PU}$$

Pada substitusi ini fungsi $\boldsymbol{P}_{ij}$ adalah konstanta-konstanta yang akan ditentukan sedemikian rupa sehingga sistem baru yang melibatkan fungsi-fungsi $u_1,\ u_2,\ \cdots, u_n$ yang tidak diketahui mempunyai matriks koefisien diagonal. Jika tipe substitusi didiferensialkan akan menjadi:

$$\boldsymbol{Y}' = \boldsymbol{PU}'$$

Jika dibuat substitusi $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{PU}$ dan $\boldsymbol{Y}' = \boldsymbol{PU}'$ pada sistem asalnya maka kita dapatkan:

$$\boldsymbol{PU}' = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{PU})$$

atau

$$\boldsymbol{U}' = (\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP})\boldsymbol{U} = \boldsymbol{DU}$$

dimana $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$. Jika diinginkan bahwa matriks koefisien $\boldsymbol{D}$ yang baru tersebut diagonal, maka harus memilih $\boldsymbol{P}$ sebagai sebuah matriks yang mendiagonalisasi $\boldsymbol{A}$.(Anton, 1987, 304)

Dengan menggunakan matriks diagonal, carilah penyelesaian Masalah Nilai Awal (MNA) persamaam diferensial berikut:

$$y'_1 = 3y_1$$
$$y'_2 = -2y_2$$
$$y'_3 = 5y_3$$

dimana $Y_1(0) = 1$, $Y_2(0) = 4$, dan $Y_3(0) = -2$.

Pemecahan:

Bentuk matriksnya yaitu:

$$\begin{bmatrix} y'_1 \\ y'_2 \\ y'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

atau

$$\boldsymbol{Y}' = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \boldsymbol{Y}$$

karena masing-masing persamaan hanya melibatkan satu fungsi tak diketahui, didapat pemecahan persamaan tersebut dengan sendiri-sendiri yaitu:

$$y_1 = c_1 e^{3x}$$
$$y_2 = c_2 e^{-2x}$$
$$y_3 = c_3 e^{5x}$$

atau dalam notasi matriks

$$\boldsymbol{Y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 e^{3x} \\ c_2 e^{-2x} \\ c_3 e^{5x} \end{bmatrix}$$

Dari kondisi awal yang diberikan, didapatkan

$$1 = y_1(0) = c_1 e^0 = c_1$$
$$4 = y_2(0) = c_2 e^0 = c_2$$
$$-2 = y_3(0) = c_3 e^0 = c_3$$

sehingga pemecahan yang memenuhi MNA adalah

$$\boldsymbol{Y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{3x} \\ 4e^{-2x} \\ -2e^{5x} \end{bmatrix}$$

atau

$$y_1 = e^{3x},\; y_2 = 4e^{-2x},\; y_3 = -2e^{5x}$$

Dengan menggunakan matriks diagonal, carilah penyelesaian umum persamaan differensial berikut:

$$y'' + y' - 2y = 0$$

Pemecahan:
Misalkan $y_1 = y$ dan $y_2 = y'$. Sehingga $y_1' = y_2$ dan $y_2' = y'' = 2y_1 - y_2$.

Adapun bentuk matriks yang diperoleh yaitu:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

A dapat terdiagonalisasi oleh sebarang matriks ***P*** yang kolom-kolomnya adalah vektor-vektor eigen dari ***A*** yang bebas linear. Karena

$$\det(\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & -1 \\ -2 & \lambda+1 \end{bmatrix}$$
$$= \lambda(\lambda+1) - 2$$
$$= \lambda^2 + \lambda - 2$$

Sehingga diperoleh nilai eigen yaitu $\lambda = 1$ dan $\lambda = -2$. Menurut definisi

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

adalah sebuah vektor eigen $\boldsymbol{A}$ bersesuaian dengan λ jika dan hanya jika $\boldsymbol{x}$ adalah sebuah pemecahan tak trivial dari $(\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = 0$, yakni dari

$$\begin{bmatrix} \lambda & -1 \\ -2 & \lambda+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Untuk $\lambda = 1$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

dengan memecahkan sistem ini maka akan menghasilkan

$$\boldsymbol{x_1} = t \text{ dan } \boldsymbol{x_2} = t$$

jadi

$$\boldsymbol{p}_1 = \begin{bmatrix} t \\ t \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

adalah sebuah basis untuk ruang eigen yang bersesuaian dengan $\lambda_1 = 1$

Untuk $\lambda = -2$

$$\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

dengan memecahkan sistem ini maka akan menghasilkan

$$\boldsymbol{x_1} = -\frac{1}{2}t \text{ dan } \boldsymbol{x_2} = t$$

jadi

$$\boldsymbol{p}_2 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}t \\ t \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

adalah sebuah basis untuk ruang eigen yang bersesuaian dengan $\lambda_2 = -2$

Jadi

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

mendiagonalisasi $\boldsymbol{A}$ dan

$$\boldsymbol{D} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

maka substitusi

$$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{PU} \text{ dan } \boldsymbol{Y}' = \boldsymbol{PU}'$$

Menghasilkan sistem persamaan diagonal yang baru, yaitu

$$\boldsymbol{U}' = \boldsymbol{DU} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}\boldsymbol{U}$$

atau

$$u_1' = u_1,\ u_2' = -2u_2$$

Pemecahan sistem ini adalah

$$u_1 = c_1e^x,\ u_2 = c_2e^{-2x}$$

atau

$$\boldsymbol{U} = \begin{bmatrix} c_1e^x \\ c_2e^{-2x} \end{bmatrix}$$

Sehingga persamaan $\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{PU}$ menghasilkan $\boldsymbol{Y}$ sebagai pemecahan baru

$$\boldsymbol{Y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1e^x \\ c_2e^{-2x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1e^x - \frac{1}{2}c_2e^{-2x} \\ c_1e^x + c_2e^{-2x} \end{bmatrix}$$

atau

$$y_1 = c_1e^x - \tfrac{1}{2}c_2e^{-2x}$$
$$y_2 = c_1e^x + c_2e^{-2x}$$

IV. KESIMPULAN DAN SARAN

A. Kesimpulan

Untuk menyelesaikan sistem persamaan differensial dengan menggunakan matriks diagonal, diperlukan beberapa syarat yang harus dipenuhi oleh persamaan differensial untuk dapat dijadikan ke dalam matriks diagonal.

Syarat yang harus terpenuhi yaitu jika terdapat matriks $\boldsymbol{A}$ (berukuran $n \times n$) yang dapat didiagonalkan, jika dan hanya jika $\boldsymbol{A}$ mempunyai n vektor eigen yang bebas linier, dan vektor-vektor eigen matriks $\boldsymbol{A}$ itu adalah kolom-kolom matriks $\boldsymbol{P}$ yang mendiagonalkan $\boldsymbol{A}$**.** Maka terdapat matriks tak singular $\boldsymbol{P}$ sehingga pendiagonalan matriks $\boldsymbol{A}$ sama dengan $\boldsymbol{P^{-1}AP}$.

B. Saran

Dalam artikel ini, penulis membatasi ruang lingkup persamaan differensial yang dapat diselesaikan menggunakan matriks diagonal. Oleh karena itu, penulis berharap kepada pembaca untuk dapat melanjutkan penelitian sampai pada persamaan differensial pada orde yang lebih tinggi.

DAFTAR PUSTAKA

Anton, Howard. *Aljabar Linear Elementer edisi kelima*. Bandung: Erlangga, 1987.

_____ dan Chris Rorres. *Aljabar Linear Elementer Versi Aplikasi Edisi Kedelapan Jilid* 2. Jakarta: Erlangga, 2005.

Anonim. *Matriks Diagonal*. http://www.google.co.id/#q=matriks+diagonal&hl=id& biw=1280 &bih=663&prmd=ivns&ei=cqPYTbWjGczjrAeA87jyBQ&start=40&sa=N&fp=e1b137162826fbb2. (12 mei 2011).

Cambage, H Rawi M. *Matriks/ Determinan*. Ujung Pandang: FPMIPA IKIP, 1980.

Departemen Agama RI. *Al-Qur'an dan Terjemahannya.* Surabaya: Karya Utama, 2005.

Firdausy, Kartika. *Nilai Eigen dan Vektor Eigen*. http://blog.uad.ac.id /kartikaf/files/2009/06/nilai-eigen.pdf (15 mei 2011).

Johnson, Richard A. *Applied Multivariate Statistical Analysis*. United States of Amerika: Prentice Hall, 2002.

Kangedi. *Matriks dan Opersinya*. http://lecturer.eepisits.edu/~kangedi/materi%20kuliah/materi%20aljabar%20linier/Bab%20I%20Matriks%20dan%20Operasinya.pdf (12 mei 2011).

Latra, I Nyoman. *Model Linear*. Surabaya: FMIPA-ITS, 2004.

Leon, Steven J. *Aljabar Linear dan Aplikasinya Edisi Kelima*. Jakarta: Penerbit Erlangga, 2001.

Lipschutz, Seymour dan Marc Lars Lipson. *Aljabar Linear Edisi Ketiga*. Jakarta: Penerbit Erlangga, 2004.

Mckim, James, Benedict Pollina dan Raymond Mcgivney. *College Algebra*. California: Wadsworth Publishing Company, 1984.

Mursita, Danang. *Invers Matriks.* http://www.geocities.ws/dmursita /matek/1-3.pdf (22 mei 2011).

_____. *Matematika Dasar untuk Perguruan Tinggi*. Bandung: Rekayasa Sains, 2006.

Negoro, ST dan Harahap. B. *Ensiklopedia Matematika.* Bogor: Ghalia Indonesia, 2005.

Purcell, Edwin J. dan Dale Varberg. *Kalkulus dan Geometri Analitis Jilid 2 Edisi Kelima*. Jakarta: Penerbit Erlangga, 1987.

Rahman, Abdul. H.M Ghalib dan Nursalam, *Persamaan Differensial Biasa*. Alauddin: Press, 2007.

Rao, C. Radhakrishna dan Helge Toutenburg, *Linear Models and Generalizations Least Squares and Alternatives.* Germany: Springer, 1999.

Riogilang, Rh. *Persamaan Differensial.* Bandung: Binacipta, 1983.

Santoso, Widiarti. *Persamaan Differensial Biasa Dengan Penerapan Modern Edisi Kedua*. Jakarta: Erlangga, 1988.

Steward, James. *Kalkulus I Edisi Keempat Jilid 2.* Jakarta: Erlangga, 2003.

Sutojo, T. dkk. *Teori dan Aplikasi Aljabar Linier & Matriks*. Yogyakarta: Penerbit ANDI, 2010.s

Yuliants, *Persamaan Differensial Orde I.* http://yuliants.blog.ittelko.ac.id/blog/ files/ 2010/02/02-Persamaan-Differensial-Orde-I.pdf (25 Mei 2011).